



书名：线性代数 双色

ISBN：978-7-5647-8976-3

作者：陈薛

出版社：电子科技大学出版社

定价：45.80元

线性代数是大学数学的一门重要基础课程,也是自然科学和工程技术各领域中广泛应用的数学工具。随着现代科技的飞速发展和计算机的广泛应用,线性代数在理论和应用上的重要性就更加突出了,这对线性代数的教学也提出了更高的要求。

本书在编写的过程中,以降低难度、理论够用为尺度,淡化数学的抽象概念、理论和证明,注重实际应用。书中的概念,引入自然、清楚、准确;定理的证明清晰、简洁;例题的安排贴切、丰富。教学内容的深广度与经管类各专业教学基本要求一致,与教育部研究生入学考试大纲数学三、数学四内容相吻合。本书内容在体现科学性和系统性的同时,力求做到由浅入深、通俗易懂,便于教师讲解和学生自学。

本书通过对基础理论的介绍,主要培养学生的学习方法,训练学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及自主学习能力,使他们能够利用线性代数知识解决相关实际问题。本书每小节后都配有适量的精选习题;每章后都配有复习题,供学有余力的学生选做。

本书内容共分为六章,具体包括第一章行列式、第二章矩阵、第三章 n 维空间向量、第四章线性方程组、第五章相似矩阵和二次型、第六章数学实验基础。本书第六章数学实验基础,重点介绍了 MATLAB 和 MATLAB 矩阵及其运算,突出线性代数在经管类专业的应用,对提高大学生数学建模能力和应用能力有很大的帮助。全书内容结构合理,逻辑性强,注重学生应用能力的培养,实用性强。

由于时间仓促,加之编写人员水平有限,教材中不足和考虑不周之处在所难免,期望得到广大专家、同行和读者的批评指正,使其在教学实践中不断完善。

编 者

第一章

行列式 1

◎ 1.1 行列式的定义 3

◎ 1.2 行列式的性质 10

◎ 1.3 行列式按行(列)展开定理 16

◎ 1.4 克拉默(Cramer)法则 23

◎ 复习题一 26

第二章

矩 阵 29

◎ 2.1 矩阵的概念 31

◎ 2.2 矩阵的运算 34

◎ 2.3 矩阵的逆 37

◎ 2.4 分块矩阵 40

◎ 2.5 矩阵的初等变换 42

◎ 2.6 矩阵的秩 45

◎ 复习题二 47

第三章

 n 维向量空间 49◎ 3.1 n 维向量及其线性运算 51

◎ 3.2 向量组的线性组合及其线性相关性 52

◎ 3.3 向量组的秩 57

◎ 复习题三 63

第四章

线性方程组 65

◎ 4.1 线性方程组 67

◎ 4.2 消元法求解线性方程组 68

◎ 4.3 线性方程组解的结构及其解法 75

◎ 复习题四 84

第五章

相似矩阵和二次型 87

◎ 5.1 向量的内积和正交 89

◎ 5.2 方阵的特征值和特征向量 95

◎ 5.3 相似矩阵 100

◎ 5.4 实对称矩阵的对角化 103

◎ 5.5 二次型及其标准型 108

◎ 5.6 用配方法化二次型为标准形 111

◎ 5.7 正定二次型 113

* 第六章

◎ 复习题五 115

数学实验基础 117

◎ 6.1 MATLAB 入门简介 119

◎ 6.2 MATLAB 矩阵及其运算 141

◎ 6.3 投入产出问题 151

◎ 6.4 个人住房抵押贷款以及其他金融问题 154

参考答案

..... 159

参考文献

..... 202

1

第一章 行列式

1.1 行列式的定义

1.1.1 二、三阶行列式

设含有两个未知数变量 x_1, x_2 的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

为了消去方程组 (1.1) 中的未知数 x_2 , 以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以方程组 (1.1) 的第一个方程与第二个方程的两端, 然后两个方程相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

类似地, 消去 x_1 , 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 则方程组 (1.1) 有唯一解。

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (1.2)$$

为了便于研究与计算, 在 (1.2) 式中引入二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

其中, 横排称为行, 纵排称为列, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为二阶行列式的元素, 二阶行列式中从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的副对角线。计算方法如下

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即二阶行列式的值就等于主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积。

$$\text{例如, } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times 4 = -5$$

根据上述定义, (1.2) 式中的分母、分子可以分别记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.3)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (1.4)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21} \quad (1.5)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (1.6)$$

分母 D 是由线性方程组 (1.1) 的系数所确定的二阶行列式 (称为系数行列式); x_1 的分子 D_1 是将 D 中第一列的元素 a_{11}, a_{21} 换成常数项 b_1, b_2 所得的二阶行列式, 于是有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

x_2 的分子 D_2 是将 D 中第一列的元素 a_{12} 、 a_{22} 换成常数项 b_1 、 b_2 所得的二阶行列式，于是有

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

当 $D \neq 0$ 时，线性方程组 (1.1) 有唯一解 (1.6)。

于是二元方程组的解的公式又可写为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \end{cases} \quad (D \neq 0)$$

【例 1-1】 解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

【解】 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7 \neq 0$$

所以线性方程组有解，且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

类似地，对于三个未知变量 x_1 、 x_2 、 x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.7)$$

我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.8)$$

称为三阶行列式。其中，元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序号，分别称为行标和列标。三阶行列式的计算方法可用图 1-1 来表示。

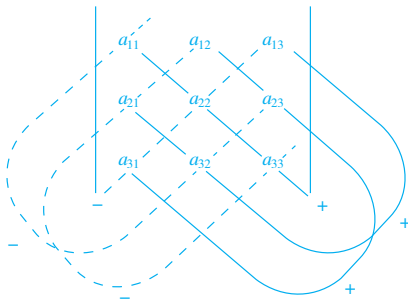


图 1-1 三阶行列式的计算方法

利用消元法求解三元线性方程组 (1.7)。当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

如果记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

可得方程组 (1.7) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (1.9)$$

【例 1-2】 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

【解】 由三阶行列式的定义, 有

$$D = 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times 1 + (-2) \times 4 \times 1 - 1 \times 2 \times 1 - 1 \times 4 \times 1 - (-2) \times 2 \times (-2) = -24$$

【例 1-3】 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

【解】 由三阶行列式的定义, 有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 3 \times 4 + x \times 9 \times 1 + 1 \times 2 \times x^2 - 1 \times 3 \times x^2 - 1 \times x \times 4 - 2 \times 9 \times 1 \\ &= 12 + 9x + 2x^2 - 3x^2 - 4x - 18 \\ &= x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$

【例 1-4】 解线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

【解】 先计算系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 12 - 7 - 3 - 56 - 5 = -69 \neq 0$$

再计算 D_1, D_2, D_3 :

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -51, D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 31, D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

由 (1.9) 式可知

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{17}{23}, x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{31}{69}, x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{5}{69}$$

1.1.2 排列与逆序

为了获得 n 阶行列式的定义, 我们要先介绍全排列、逆序数及其有关的概念。

定义 1 把 n 个不同的自然数 $1, 2, \dots, n$ 排成一个有序数组 $i_1 i_2 \dots i_n$ 称为一个 n 级全排列, 简称“排列”。例如: 123 是一个 3 级排列, 42351 是一个 5 级排列, 21458673 是一个 8 级排列。

一般地, n 级排列的总的排列方法为 $n!$ 个。例如, 3 级排列的总的排列方法有 $3! = 6$ 个, 即 123, 132, 213, 231, 312, 321

显然, $12 \dots n$ 也是一个 n 级排列, 这个排列具有自然顺序, 就是按递增的顺序排列起来的, 我们称为自然排列, 其他排列都或多或少地破坏了自然顺序。

定义 2 在一个排列中, 如果一个较大的数码排在某一个较小的数码的前面, 就说这两个数码构成一个逆序。例如, 排列 132 有一个逆序, 321 有三个逆序。一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数 (或者为 0) 的排列称为偶排列。

下面介绍求逆序数的方法, 设 $P_1 P_2 \dots P_n$ 为 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 考虑数 P_i ($1, 2, \dots, n$), 如果比 P_i 大且排在 P_i 前面的数有 τ_i 个, 就说 P_i 的逆序数为 τ_i , 每个数的逆序数之和为 $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$, 即是这个排列的逆序数, 记为 $\tau(P_1 P_2 \dots P_n)$, 即 $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ 。

【例 1-5】 求排列 45321 的逆序数。

【解】 在排列 45321 中, 4 排在首位, 比 4 大的且排在 4 前面的数有 0 个, 所以数逆序数为 0;

5 是最大的数, 故逆序数为 0;

类似地, 3 的前面比 3 大的数有两个: 4, 5, 故逆序数为 2;

2 的前面比 2 大的数有三个: 4, 5, 3, 故逆序数为 3;

1 的前面比 1 大的数有四个: 4, 5, 3, 2, 故逆序数为 4。

所以这个排列的逆序数为

$\tau(45321) = 0 + 0 + 2 + 3 + 4 = 9$, 故排列 45321 是一个奇排列, 显然, $\tau(12 \dots n) = 0$, 所以自然数排列是偶排列。

把一个排列中某两个数的位置互换, 而其余的数不动, 就得到另一个排列。这样的变换称为对换。将相邻的两个数对换, 叫作相邻对换。

定理 1 做一次对换改变排列的奇偶性。

定理 2 在全部的 n 级排列中, 奇、偶排列的个数相等, 各有 $\frac{n!}{2}$ 个 (证明略)。

1.1.3 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义, 先来研究三阶行列式的结构。我们知道三阶行列式的定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.10)$$

容易看出:

(1) (1.10) 式右边的每一项都恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于不同行、不同列。因此, 式 (1.10) 右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$ 。这里的第一个下标 (行标) 排成自然顺序 123, 而第二个下标 (列标) 排成 $p_1 p_2 p_3$, 它是 1, 2, 3 这三个数构成的排列中的某个排列。这样的排列共有 6 个, 对应式 (1.10) 右端共含 6 项。

(2) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是: 123, 231, 312;

带负号的三项列标排列是: 132, 213, 321。

经计算可知前三个排列都是偶排列, 后三个排列都是奇排列。因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)}$, 其中 $\tau(p_1 p_2 p_3)$ 为列标排列的逆序数。

经过分析, 三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中, $\sum$ 表示对 1, 2, 3 这三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 求和。

显然, 二阶行列式也符合这些特征, 可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum_{p_1 p_2} (-1)^{\tau(p_1 p_2)} a_{1p_1} a_{2p_2}$$

定义 3 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 排成 n 行 n 列, 称为 n 阶行列式,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.12)$$

的代数和。其中行标依次构成自然排列, 列标 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是数 1, 2, $\dots$, n 的一个 n 级排列, 每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$, 即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 式 (1.12) 前带正号, 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 式 (1.12) 前带负号, 记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.13)$$

其中, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和, 有时简记行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 。

我们称式 (1.13) 为 n 阶行列式的展开式, 它是前面二阶行列式和三阶行列式的推广。显然, 由一个元素构成的一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 a_{11} 本身, 即 $|a_{11}| = a_{11}$ 。注意不要与绝对值符号相混淆。

例如, 计算一个四阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

根据定义 3, 行列式 D 的展开式表示的代数和中有 $4! = 24$ 项。考虑其一般项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$, 由于第一行中除 a_{14} 外全为 0, 故只考虑 $j_1=4$; 同理, 只需考虑 $j_2=3, j_3=2, j_4=1$, 这就是说, 行列式展开式中不为 0 的项只有 $a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$, 而其逆序数为 $\tau_{(4321)} = 6$, 所以此项的符号为正号。因此行列式 D 的值为

$$D = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

【例 1-6】 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【解】 根据行列式的定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

根据一般项考察不为零的项。

$$D = (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

上述行列式称为上三角行列式, 其特征为在 a_{11} 到 a_{nn} 所构成的主对角线以下的元素全为零。上三角行列式的值等于其主对角线上 n 个元素的乘积。

作为【例 1-2】的特殊情况, 如下行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这种除主对角线上元素外, 其余元素为零的行列式称为对角行列式。

【例 1-7】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

【解】 根据行列式的定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

根据 D 的特点, D 中各项的 n 个元素的乘积, 除 $a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n-12} a_{n1}$ 外, 其余全部为零, 所有

$$D = (-1)^{\tau(nn-1 \cdots 21)} n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$$

我们称上述行列式为副对角行列式。

$$\text{定理 3 } n \text{ 阶行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 中的乘积项可以表示成} \\ (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad (1.14)$$

或

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad (1.15)$$

式 (1.14) 列标是自然排列、行标是 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 时的乘积项, 式 (1.15) 中行标 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和列标 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 均为 n 级排列。

式 (1.14) 和式 (1.15) 的价值在于丰富了用定义计算行列式的方法, 即不一定只用行标是自然排列、列标是 n 级排列来计算行列式, 也可用列标是自然排列、行标是 n 级排列, 或行标、列标都是 n 级排列来计算行列式。

例如, 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

既可按照式 (1.13) 计算:

$$D = (-1)^{\tau(1423)} abcd = abcd$$

也可按照式 (1.14) 计算:

$$D = (-1)^{\tau(1342)} acdb = abcd$$

【习题 1.1】

1. 计算下列二阶、三阶行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & ab \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 求 k 为何值时, 下列行列式成立。

$$(1) \begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & k \\ 4 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} \neq 0$$

3. 求下列排列的逆序数。

(1) 41253;

(2) 3712456 ;

(3) $n(n-1) \cdots 21$ 。

4. 选择 i 和 k 使:

(1) 1274*i*56*k*9 成为偶排列;

(2) 3972*i*15*j*4 成为奇排列。

5. 在六阶行列式中, 下列各元素乘积应取什么符号?

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$;

(2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$;

(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$;

(4) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$;

(5) $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$ 。

6. 选择 k 和 l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式中带有负号的项。

$$7. \text{ 确定下列 16 个元素皆不同的四阶行列式 } \begin{vmatrix} 1 & -6 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & 7 & -7 & 2 \end{vmatrix} \text{ 中乘积 } 8 \times (-5) \times (-2) \times 6$$

前应赋予什么符号?

8. 计算行列式。

$$\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.2 行列式的性质

设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 中的行与列互换, 所得的 n 阶行列式记作 D^T , 即

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^T 为 n 阶行列式 D 的转置行列式。

性质 1 行列式 D 与其转置行列式 D^T 相等, 即 $D = D^T$ 。

证 设 $D^T = |b_{ij}|$, 因为在 D 中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 就是 D^T 中第 j 行第 i 列的元素 b_{ji} , 即 $a_{ij} = b_{ji}$, 所以由行列式定义式 (1.13) 和式 (1.14), 得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\ &= D^T \end{aligned}$$

性质 1 说明: 在行列式中行与列的地位是对等的, 对行成立的性质对列也成立。下面行列式的其他性质都具有这个特点, 因此一般仅对行给出证明。

【例 1-8】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【解】 根据性质 1 得

$$D = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

我们称在 a_{11} 到 a_{nn} 所组成的对角线以上的元素全为零的行列式为下三角行列式, 其行列式的值等于其主对角线上元素的乘积。上三角行列式和下三角行列式统称为三角行列式, 显然三角行列式的值都等于主对角线元素的乘积。

三角行列式的这一计算结果, 在行列式的计算中经常被人们加以利用来简化行列式的计算。

性质 2 在行列式中, 互换两行 (或两列) 对应元素的位置, 行列式的值改变符号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 设上式左边行列式为 D , 右边为 D_1 , 且 D_1 的第 i 行第 j 列元素为 b_{ij} , 则 D 的 s 行、 t 行与 D_1 的 t 行、 s 行的元素之间有关系:

$$a_{sj} = b_{tj}, \quad a_{tj} = b_{sj} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

此外, 由 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i \neq s, t; j=1, 2, \dots, n$), 注意到对换改变排列的奇偶性, 所以 $\tau(1 \cdots s \cdots t \cdots n)$ 与 $\tau(1 \cdots t \cdots s \cdots n)$ 的奇偶性相反, 由式 (1.15) 得

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{\tau(1 \cdots s \cdots t \cdots n) + \tau(1 \cdots t \cdots s \cdots n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} \\ &= - \sum (-1)^{\tau(1 \cdots t \cdots s \cdots n) + \tau(1 \cdots s \cdots t \cdots n)} b_{1j_1} \cdots b_{tj_t} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{nj_n} \\ &= -D_1 \end{aligned}$$

例如,
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

推论 若行列式的两行 (列) 完全相同, 则此行列式为零。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t1} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t1} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

证 由性质 2, 交换行列式的 t 行和 s 行的所有对应元素, 有

$$D = -D$$

则 $D=0$ 。

性质 3 在行列式中, 如果某一行 (列) 的所有元素都有公因子 k , 则 k 可提到行列式符号之外。

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 在上式中, 由行列式的定义, 得

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots ka_{ij_i} a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} a_{nj_n} \\ &= \text{右端} \end{aligned}$$

推论 1 在行列式中, 如果有一行 (或列) 元素全为零, 则行列式的值为零。

例如
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第 2 行对应元素全为 } 0)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第 2 列对应元素全为 } 0)$$

推论 2 在行列式中, 如果两行 (或两列) 对应元素成比例, 则行列式的值为零。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t1} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{t1} & ka_{t1} & \cdots & ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

例如, $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 14 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (第 2、第 3 行对应元素成比例)

注意: 在行列式中, 如果所有元素都有公因子 k , 则可以将 k 提到行列式外表示成 k^n , 即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 在行列式中, 如果某一行 (或列) 的所有元素都是两个数的和, 则此行列式等于两个新行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} + b_{t1} & a_{t2} + b_{t2} & \cdots & a_{tn} + b_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 设上式左边行列式为 D , 右边第一个行列式为 D_1 , 第二个行列式为 D_2 , 由行列式的定义得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{sj_s} + b_{sj_s}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

注意:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

这说明两个行列式的和一般不等于这两个行列式中元素对应相加, 即行列式一般没有元素相加运算。事实上

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

【例 1-9】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 198 & 299 & 103 \end{vmatrix}$$

【解】 把行列式的第三行元素分别看为: $200-2$, $300-1$, $100+3$, 利用性质 4 和性质 3 推论 2, 得

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 200-2 & 300-1 & 100+3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 200 & 300 & 100 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 0 + 6 = 6
 \end{aligned}$$

【例 1-10】 证明

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

【证】 因为等号左边的行列式中每一列都是两个元素相加，利用性质 4、性质 3 及推论 2，得

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} \\
 &= \left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & a_3 \end{vmatrix} \right] \\
 &\quad + \left[\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} \right] \\
 &= \left[\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} \right] + \left[\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} \right] \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

性质 5 在 n 阶行列式中，某一行（或列）各元素同乘以数 k 后，分别加到另一行（或列）各对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 在行列式的计算中最常用，它是行列式的重要工具。利用行列式的性质结合例 1-8 的结果，可以获得行列式的第一种基本计算方法——三角行列式法。它的一般步骤如下。

(1) 若 $a_{11} \neq 0$ ，将第一行或第一列提取公因子 a_{11} 到行列式外，使第一行第一个元素为 1（注意尽量避免将元素化为分数，否则将给后面的计算增加困难）。

若 $a_{11} = 0$ ，将第一行与其他行互换（注意互换行改变行列式值的符号），使新的 $a'_{11} \neq 0$ ，然后提取

公因子 a'_{11} , 使第一行第一个元素为 1.

(2) 将第一行乘 $-a_{21}, -a_{31}, \dots, -a_{n1}$ (或者 $-a'_{21}, -a'_{31}, \dots, -a'_{n1}$) 并分别加到第 2, 3, $\dots, n$ 行对应元素上, 使第一行或第一个元素以下的元素全部化为零.

从第二行依次用类似的方法把主对角线 $a'_{22}, a'_{33}, \dots, a'_{n-1, n-1}$ 以下的元素全部化为零, 即可得上三角行列式, 这时主对角线上所有元素的乘积就是行列式的值.

为了清楚地反映行列式的变换过程, 特规定以下记号.

“ $r_i \leftrightarrow r_j$ ”表示将行列式的第 i, j 行元素互换;

“ kr_i ”表示将行列式的第 i 行的元素乘以 k ;

“ $r_i + kr_j$ ”表示将行列式的第 j 列元素的 k 倍加到第 i 行的元素.

此外约定, 对行列式的列进行的类似变换只需将上述记号中的字母“ r ”换作“ c ”即可. 例如, “ $c_2 - 3c_4$ ”表示将行列式的第 4 列元素乘以 -3 加到第 2 列元素; “ $c_4 + c_1 + c_2 + c_3$ ”表示将行列式的第 1, 2, 3 列元素加到第 4 列元素上去.

【例 1-11】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

【解】 由于 $a_{11} = 1 \neq 0$, 利用 a_{11} 把第一列的其余元素化为零, 得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_2 + r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 - \frac{1}{3}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 60$$

【例 1-12】 计算 n 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

【解】 由于行列式的每一行的元素之和是相同的, 因此, 从第 2 列开始将各列的元素都加到第一列, 然后提出第一列的公因子 $[a + (n-1)b]$, 再将第一行乘以 -1 加到其余各行, D 就化为上三角行列式. 即

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \vdots \\ r_n - r_1}} [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & b & \cdots & b \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\ = [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}$$

【例 1-13】 解方程

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & n-x \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

【解】 把行列式最后一行乘以-1加到第一行,再将第一行乘以-1分别加到其余各行,就化为上三角行列式,即

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & n-x \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1-r_n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_i-r_1, i=2,3,\dots,n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-x \end{vmatrix} = -x(1-x)\cdots[(n-2)-x] = 0$$

所以方程的解为 $x_1=0, x_2=1, \dots, x_{n-1}=n-2$ 。

【习题 1.2】

1.用行列式的性质计算行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 302 \\ -4 & 3 & 297 \\ 2 & 2 & 203 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ -a & b-a & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2.计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & b \\ a & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

3. 计算下列 n 阶行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

4. 解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3-x & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 5-x & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1-x \end{vmatrix}$$

1.3 行列式按行(列)展开定理

1.3.1 按一行(列)展开行列式

定义 1 在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 留下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来顺序排列所得的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} 。

记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

由定义可知, A_{ij} 与行列式中第 i 行、第 j 列的元素无关。

例如, 五阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{34} 和 a_{11} 的余子式分别为

$$M_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}, M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

其对应的代数余子式

$$A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = -M_{34}, A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$$

引理 若在 n 阶行列式 D 的第 i 行中有一个元素 $a_{ij} \neq 0$, 其余元素全为零, 则

$$D = a_{ij} A_{ij}$$

证 先证明 $i=1, j=1$ 的情形。此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为在 D 的第一行元素中, 除 a_{11} 外其余都为零, 所以在 D 中含有 a_{1j} ($j_1 \neq 1$) 的项都为零, 由行列式的定义得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{1j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} \sum_{j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} M_{11} = a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= a_{11} M_{11} \end{aligned}$$

再证明一般情形, 此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

先将第 i 行依次与第 $i-1, i-2, \cdots, 2, 1$ 行互换后, 再将第 j 列依次与第 $j-1, j-2, \cdots, 2, 1$ 列互换, 由行列式的性质 2, 得

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{(i-1)+(j-1)} a_{ij} M_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij} \end{aligned}$$

定理 1 设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 n 阶行列式 D 的值等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和。即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

证 仅证 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & a_{11} & & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + 0 + \cdots + a_{in} \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & a_{n1} & & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式性质 4 及引理得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

【例 1-14】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

【解】 由定理 1, 按第一行展开, 得

$$D = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ = 2 \times 2 - 4 \times (-6 - 15) = 88$$

推论 n 阶行列式 D 的任意一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积的和等于零。即

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0 \quad (i \neq s)$$

$$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = 0 \quad (j \neq t)$$

证 把行列式 D 的第 s 行元素换为第 i 行 ($i \neq s$) 的对应元素, 得到新的行列式 D_1 。 D_1 中有两行元素完全相同, 因此 $D_1 = 0$ 。把 D_1 按第 s 行展开, 得

$$D_1 = a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = 0 \quad (i \neq s)$$

用类似的方法可证

$$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = 0 \quad (j \neq t)$$

综合定理 1 及其推论, 有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{sj} = \begin{cases} D, & i=s \\ 0, & i \neq s \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{it} = \begin{cases} D, & j=t \\ 0, & j \neq t \end{cases}$$

定理 1 表明, n 阶行列式的计算可以“降”为若干个 $n-1$ 阶的行列式计算, 但当行列式的某一行(列)的元素有很多不为零时, 按这行(列)展开并不能减少很多计算量, 因此, 我们总是选择行列式中有较多零元素的行(列)来展开。其主要做法是: 先利用行列式的性质把行列式的某行(列)尽可能化为仅含一个非零元素, 再结合定理 4, 按此行(列)降阶展开, 就能简化行列式的计算。实际上这是一种将高阶行列式化为低阶行列式的计算方法, 称为降阶法, 它是行列式的第二种计算方法。

【例 1-15】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

【解】 先观察到第四列的元素中, 已有两个为零, 则利用行列式的性质, 将第一行的各元素乘以 -2 加到第二行上, 再按第四列降阶展开, 得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1)^{1+4} \times \begin{vmatrix} 0 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 - 2c_1} \begin{vmatrix} 0 & 8 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

继续按第二行降阶展开, 得

$$D = -1 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

【例 1-16】 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

【解】 先按第一列降阶展开, 再按三角行列式计算, 得

$$\begin{aligned} D &= a \begin{vmatrix} b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix} \\ &= a^n + (-1)^{n+1} b^n \end{aligned}$$

【例 1-17】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

【解】 先将行列式的第二, 第三, $\cdots$, 第 n 列分别乘以 x , x^2 , $\cdots$, x^{n-1} 加到第一列, 然后再按

第一列降阶展开, 得

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} \right) (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} \right) (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}
 \end{aligned}$$

【例 1-18】 证明范德蒙德行列式

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{\substack{n \geq i > j \geq 1}} (x_i - x_j)
 \end{aligned}$$

【证】 用数学归纳法证明, 当 $n=2$ 时,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

结论成立。假定结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立, 下面证明对 n 阶范德蒙德行列式结论也成立。

从第 n 行起到第二行, 每行各元素都依次减去上面一行对应元素的 x_1 倍, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第一列展开, 并提出各列公因子, 得

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

右边行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式, 由假设知

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \sim \prod_{n \geq i > j \geq 2} (x_i - x_j)$$

即

$$D_n = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

【例 1-19】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

【解】 在 D_n 中, 先将第一行的公因子 x 提出来, 又将第一行乘以 -1 加到第二行, 再按第一列降阶展开, 得

$$\begin{aligned} D_n &= x \begin{vmatrix} 1 & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} 1 & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & xy & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix} \\ &= x D_{n-1} \end{aligned}$$

于是, 可得递推公式

$$D_n = x D_{n-1}$$

由于 D_{n-1} 是与 D_n 具有相同元素结构的 $n-1$ 阶行列式, 对 D_{n-1} 继续提公因子, 降阶展开, 又得 $D_{n-1} = x D_{n-2}$, 同理, $D_{n-3} = x D_{n-4}$, $\cdots$, $D_1 = 1$, 故

$$D_n = x D_{n-1} = x^2 D_{n-2} = \cdots = x^{n-1} D_1 = x^n$$

1.3.2 行列式按某 k 行 (列) 展开

定义 2 在 n 阶行列式 D 中, 任意选定 k 行和 k 列 ($1 \leq k \leq n$), 位于这些行和列交叉点处的 k^2 个元素, 按原来排列组成相对保持不变的一个 k 阶行列式 M , 称为行列式 D 的一个 k 阶子式。

在 D 中划去 k 行、 k 列后, 余下的元素按原来排列组成相对保持不变的一个 $n-k$ 阶行列式 N , 称为 k 阶子式 M 的余子式。

如果 k 阶子式 M 在 D 中所在行与列的行标和列标分别为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$, 则在 M 的余子式 N 前添加符号

$$A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} N$$

后, 所得到的 $n-k$ 阶行列式, 称为 k 阶子式 M 的代数余子式, 记作 A , 即

$$A = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} N$$

例如, 在四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 中, 如果选定第一、第二行和第三、第四列, 就可以确定

行列式 D 的一个二阶子式

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

M 的余子式为

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

M 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

拉普拉斯定理 在行列式 D 中任意取定 k 行 ($1 \leq k \leq n$), 则行列式 D 等于由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式 $M_1, M_2, \dots, M_t$ 与其对应的代数余子式 $A_1, A_2, \dots, A_t$ 的乘积之和。即

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t \quad (t = C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!})$$

证明略。

显然, 定理 4 是定理 5 取一阶子式的特殊情形。定理 5 主要应用于高阶行列式的某些行和列中零元素较多的行列式计算。

【例 1-20】 用拉普拉斯定理计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

【解】 因为在行列式中按第三、第四行展开的全部二阶子式为

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以由定理 5, 得

$$D = M_4 A_4$$

而 $M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$ 的代数余子式为

$$A = (-1)^{(3+4)+(2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -12$$

故

$$D = M_4 A_4 = 6 \times (-12) = -72$$

【习题 1.3】

1. 计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 27 & 8 & 64 \\ 1 & 9 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

2. 计算下列 n 阶行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3. \text{ 设多项式 } f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & x & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & x^3 & 1 \\ 0 & -2 & x^2 & 4 \end{vmatrix}, \text{ 求 } f(x) \text{ 各项的系数及常数项。}$$

1.4 克拉默(Cramer)法则

定理 1 (克拉默法则) 如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一的解

$$x_j = \frac{D_j}{D} (j=1, 2, \cdots, n)$$

其中, $D_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 是把系数行列式 D 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 换为方程组常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 其余元素不变所得到的行列式。即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (j=1, 2, \cdots, n)$$

(证明略)

【例 1-21】 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \quad \quad - 6x_4 = 9 \\ \quad \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

【解】 因为方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

所以方程组有唯一解。

同样可以计算

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81 & D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27 & D_4 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, x_2 = \frac{D_2}{D} = -4, x_3 = \frac{D_3}{D} = -1, x_4 = \frac{D_4}{D} = 1.$$

即方程组有唯一解为 $x_1=3, x_2=-4, x_3=-1, x_4=1$ 。

在 n 元线性方程组中, 如果常数项 $b_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 全为零,

$$\text{即} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 n 元齐次线性方程组。显然, 齐次线性方程组必定有解 $x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$ 。

称为齐次线性方程组的零解,关于 n 元齐次线性方程的解有如下推论。

推论 1 若 n 元齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$, 则方程组仅有零解。

证 因为 $D \neq 0$, 根据克拉默法则, 方程组有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} (j=1, 2, \dots, n)$$

由于方程组的常数项全为零, 由行列式性质 3 的推论 1 知方程组仅有零解。

推论 2 如果齐次线性方程组有非零解, 则方程组的系数行列式 $D=0$ 。

【习题 1.4】

1. 用克拉默法则求解下列方程组。

$$(1) \begin{cases} bx - ay + 2ab = 0 \\ -2cy + 3bz - bc = 0, \text{ 其中 } abc \neq 0 \\ cx + az = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} ax_1 + ax_2 + bx_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + ax_3 = 1, \text{ 其中 } a \neq b, -\frac{b}{2} \\ bx_1 + ax_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

2. 讨论 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解, 并求出其解。

3. 当 k 取何值时, 下面的方程组仅有零解?

$$(1) \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ kx + 7y - 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

4. 对于三次多项式 $f(x)$, 已知 $f(0)=0$, $f(1)=-1$, $f(2)=4$, $f(-1)=1$, 求 $f(x)$ 。

5. 某工厂生产甲、乙、丙三种钢制品, 已知甲种产品的钢材利用率为 60%, 乙种产品的钢材利用率为 70%, 丙种产品钢材利用率为 80%。年进货钢材总吨位为 100 吨, 年产品总吨位为 67 吨。此外甲、乙两种产品必须配套生产, 乙产品成品总重量是甲产品成品总重量的 70%。还已知生产甲、乙、丙三种产品每吨可获得的利润分别是 1 万元、1.5 万元、2 万元。问该工厂本年度可获利润多少万元。

【复习题一】

1. 排列 34679215 的逆序数 $\tau(34679215) =$ _____。

2. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ _____。

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{31} =$ _____, $A_{32} =$ _____。

4. 若将行列式 D 的某两行互换, 再将其中某一列每个元素都反号, 则行列式的值 _____。

5. 若行列式每行元素之和都为零, 则此行列式的值为 _____。

6. 线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = m \\ cx_1 + dx_2 = n \end{cases}$ 的系数满足 _____ 时, 方程组有唯一解。

7. 若 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$, 则 $x =$ _____。

8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ _____。

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}$ 中的代数余子式 A_{34} 为 _____。

10. 将 n 阶行列式 D 中所有元素都反号, 形成的行列式的值为 _____。

11. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D$, $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix} =$ _____。

12. 解方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ 。

13. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$, 求行列式 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & 5a_{11}-4a_{12} & a_{13} \\ 6a_{21} & 5a_{21}-4a_{22} & a_{23} \\ 6a_{31} & 5a_{31}-4a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的值。

14. 求 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & x & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ 中 x 的系数。

15. 计算行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 。



16. 若某四阶行列式第三行元素依次为 $a_{31}=2$, $a_{32}=7$, $a_{33}=-2$, $a_{34}=5$, 对应的余子式依次为 $M_{31}=6$, $M_{32}=1$, $M_{33}=3$, $M_{34}=2$, 求此行列式的值。

17. 已知
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
, 求 $x =$ _____。

18. 求行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$
 的值。

19. 用克拉默法则求解方程组
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$
。